Bloque 2. Sistemas formales.

Consecuencia sintáctica.

Sistema formal. Axiomas lógicos: tautologías, axiomas de cuantificadores y axiomas de igualdad; reglas de deducción: modus ponens y generalización; demostración (formal); teorema; consecuencia sintáctica ($T \vdash F$). Ejemplos de demostraciones. Demostraciones abreviadas.

`Prop.2.1` Las fórmulas que expresan que la relación de igualdad es una relación de equivalencia son teoremas.

Teorías coherentes e incoherentes.

`Prop.2.2(Caracterización de las teorías incoherentes).` Sean L un lenguaje y T una L-teoría. Las siguientes propiedades son equivalentes:

(1) T incoherente;

(2) Existe una L-fórmula F tal que $T \vdash \neg(F \to F)$, y

(3) Para toda L-fórmula F se tienen $T \vdash F$.

Teoremas de Finitud y de la Deducción.

`Teorema de Finitud (TF).` Sean L un lenguaje, T una L-teoría y F una L-fórmula. Si $T \vdash F$ entonces existe $T_0 \subseteq T$ finito tal que $T_0 \vdash F$.

`Cor.1 al TF.` Sean L un lenguaje, T una L-teoría. Si toda $T_0 \subseteq T$ finita es coherente, entonces T es coherente.

`Cor.2 al TF (Unión de teorías coherentes).` Sean L un lenguaje e I un conjunto. Para cada $i \in I$ sea T_i una L-teoría coherente. Supongamos que el conjunto $\{T_i \mid i \in I\}$ está totalemente ordenado por la inclusión.

Entonces $T = \bigcup_{i \in I} T_i$ es una L-teoría coherente.

`Teorema de la Deducción (TD).` Sean L un lenguaje, T una L-teoría y G una L-fórmula. Sea F un enunciado de L. Supongamos que $T \cup \{F\} \vdash G$. Entonces $T \vdash F \to G$.

`Cor.1 al TD.` Sean L un lenguaje, T una L-teoría y F un enunciado de L. Entonces,

(1) $T \vdash F$ si y solo si $T \cup \{\neg F\}$ es incoherente, y

(2) $T \nvdash F$ si y solo si $T \cup \{\neg F\}$ es coherente.

`Cor.2 al TD.` El Teorema de Finitud es equivalente al Cor.1 al TF.

`Prop.2.3 (Extensión mediante constantes nuevas).` Sean L un lenguaje, T una L-teoría y $F\colon F(x_1, \ldots, x_n)$ una L-fórmula. Sea $L' = L \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$ donde las c_i son constantes nuevas. Entonces,
$T \vdash F$ si y solo si $T \vdash F(c_1/x_1, \ldots, c_n/x_n)$.

Teorema de Igualdad.

`Lema.` Sean L un lenguaje y $t_i \in Ter(L)$, $i = 1, 2, 3$. Entonces
$\vdash t_1 = t_1$, $\quad \vdash t_1 = t_2 \to t_2 = t_1 \quad$ y $\quad \vdash t_1 = t_2 \to (t_2 = t_3 \to t_1 = t_3)$.

`Teorema de Igualdad (TI).` Sean L un lenguaje y $t, s_1, s_2 \in Ter(L)$. Sean x una variable y F una L-fórmula tales que x es sustituible por s_i en F, para $i = 1, 2$. Sea T una L-teoría. Entonces,

(a) $T \vdash s_1 = s_2$ implica $T \vdash t(s_1/x) = t(s_2/x)$,

(b) $T \vdash s_1 = s_2$ implica $T \vdash F(s_1/x) \leftrightarrow F(s_2/x)$.

`Cor. al TI.` Con las mismas hipótesis que el teorema.

(a') $T \vdash s_1 = s_2 \to t(s_1/x) = t(s_2/x)$,

(b') $T \vdash s_1 = s_2 \to (F(s_1/x) \leftrightarrow F(s_2/x))$.

Teorema de Validez.

`Lema.` Sea L un lenguaje. Los axiomas lógico de L son fórmulas válidas de L.

`Teorema de Validez (TV).` Sean L un lenguaje, T una L-teoría y F una L-fórmula. Entonces, $T \vdash F$ implica $T \models F$. En particular los teoremas de L son fórmulas válidas.

Lógica, lógicas válidas y lógicas completas.

`Cor.1 al TV.` Sean L un lenguaje, T una L-teoría. Si $Mod(T) \neq \emptyset$ entonces T es coherente.

`Cor.2 al TV.` El teorema de Validez es equivalente al Cor.1 al TV.